Elementi računa verovatnoće

– A – događaj

Ako postoji mogućnost da se A desi ili ne desi onda je A slučajni događaj.

– Verovatnoća događaja

$$P(A) = \frac{n}{N}$$ → broj povoljnih ishoda

$$P(\bar{A}) = \frac{N-n}{N}$$

Klasična def. verovatnoće

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{n(A)}{N}$$

Statistička def. verovatnoće

Matematika: Aksiomatski prilaz teoriji verovatnoće (Kolmogorov)

– Događaji: isključivi & nezavisni

$$A = A_1 + A_2 + \dots A_n$$

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \dots P(A_n)$$

$$A = A_1 A_2 \dots A_n$$

$$P(A) = P(A_1) \dots P(A_n)$$

Dakle, verovatnoća je f-ja koja skupu događaja pridružuje broj iz intervala $[0,1]$

$$P_i : \{A_i\} \to [0,1] \ , \ \forall i$$

Slučajna promenljiva je f-ja koja skupu događaja pridružuje brojeve (po dogovoru

$\mathbb{X} : \{A_i\} \to x_i \quad , \forall i, \quad x_i \in \mathbb{R}$

Slučajna promenljiva može biti

Diskretna	Kontinualna
$\{x_i, p_i\} \quad \sum_i p_i = 1$	$\{x\} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dw(x) = 1$
F-ja raspodele	F-ja raspodele
$F(x) = P(\mathbb{X} < x) = \sum_{x_i < x} p_i$	$F(x) = P(\mathbb{X} < x) = \int_{-\infty}^{x} dw(x)$
	$f(x) = \frac{dw(x)}{dx}$
	gustina verovatnoće
a) Binomna raspodela	a) Gauß-ova raspodela (Normalna raspodela)
$\{x_i, p_i\} ; \; P_i = \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i}$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
b) Poisson-ova raspodela	
$\{x_i, p_i\} ; \; P_i = \frac{a^i}{i!} e^{-a} , \; a > 0$	
Srednja vrednost $\mathbb{X}$	Srednja vrednost $\mathbb{X}$
$\langle \mathbb{X} \rangle = \sum_i x_i p_i$	$\langle \mathbb{X} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, dw(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

Disperzija

$$D(\mathbb{X}) = \langle \mathbb{X}^2 \rangle - \langle \mathbb{X} \rangle^2$$

Terminologija

Fizika vs Matematika

$$f(x) = \frac{dw(x)}{dx}$$
$\downarrow$
f-ja raspodele

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$
$\downarrow$ f-ja raspodele

$\downarrow$ gustina verovatnoće

Matematički dodatak

Stirlingova aproksimacija

$\ln n! \approx n\ln n - n$, $n \in N$

Euler-ova Γ f-ja

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, $x \in R$

$\Gamma(n+1) = n!$, $n \in N$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Poisson-ov integral

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Kombinatorni obrasci

Permutacije bez ponavljanja od n elemenata

$$P_n = n!$$

Permutacije sa ponavljanjem $\alpha_1 + \dots + \alpha_s = n$

$$P_n^{\alpha_1, \dots, \alpha_s} = \frac{n!}{\alpha_1! \, \alpha_2! \dots \alpha_s!}$$

Varijacije k-te klase od n elemenata bez ponavljanja

$$V_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}_{k}$$

Varijacije k-te klase od n elemenata sa ponavljanjem

$$V_n^k = n^k$$

e.g. $2^k \rightarrow$ dužine binarnih reči

Kombinacije k-te klase od n elemenata bez ponav.

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

Kombinacije k-te klase od n elemenata sa ponavljanjem

$$C_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

$\left.\begin{matrix} P \\ V \end{matrix}\right\}$ bitan redosled

C – redosled nije

2. Broj elektrona emitovanih sa užarene katode u jedinici vremena predstavlja slučajnu veličinu koja se ponaša po Poisson-ovom zakonu raspodele, tj. verovatnoća da u jedinici vremena bude emitovano n elektrona data je izrazom

$$P_n = \frac{a^n}{n!} e^{-a}.$$

a) Proveriti da li je zadovoljen uslov normiranja $\sum_n P_n = 1$ i zatim naći $\langle n \rangle$ i $D(n)$;

b) Kolike su verovatnoće da za jedinicu vremena bude emitovan bar jedan elektron, odnosno bilo koji broj elektrona veći od srednjeg broja elektrona?

$$P_n = \frac{a^n}{n!} e^{-a}$$

a) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^{-a} e^{a} = 1$$

~~b)~~ $$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{a^n}{n!} e^{-a} =$$

$$= e^{-a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(n-1)!} = a e^{-a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} = a e^{-a} e^{a} = a$$

$$\langle n(n-1)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\frac{a^n}{n!}e^{-a}$$

$$= e^{-a}a^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} = a^2$$

$$\left.\begin{aligned} \langle n^2 - n\rangle &= a^2 \\ \langle n^2\rangle - \langle n\rangle &= a^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \langle n^2\rangle = a^2 + a$$

$$D(n) = \langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2 = a^2 + a - a^2 = a$$

b) $P(n=0) = e^{-a}$

$$P(n=0) + P(n\geq 1) = 1$$

$$P(n\geq 1) = 1 - P(n=0) = 1 - e^{-a}$$

$$P_1(n\leq a) + P_2(n>a) = 1$$

a nije ceo broj, pa uzimamo $[a]$

$$P_1 = \sum_{n=0}^{[a]} \frac{a^n}{n!}e^{-a} \Rightarrow P_2(n>a) = 1 - \sum_{n=0}^{[a]} \frac{a^n}{n!}e^{-a}$$

ДОГАЂАЈИ СУ ИСКЉУЧИВИ

2 Posmatrati sledeće gustine verovatnoća slučajne promenljive X

a) $f(x) = A\, e^{-\alpha x}$ $\quad (0 \leq x + \infty)$ Eksp. rasp.

b) $f(x) = \begin{cases} A & 0 \leq x \leq b \\ 0 & x < a,\ x > b \end{cases}$ Ravnomerna raspodela

c) $f(x) = A\, e^{-\alpha x^2}$ $\quad (-\infty < x < \infty)$ Gauss-ova raspodela

d) $f(x) = A\, e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^4}$ $\quad (0 \leq x \leq \infty)$ Druystein-ova raspodela

Normirati f-je $f(x)$, odrediti $\langle X \rangle$ i $D(X)$

---

a) d) Domaći
b)

c)

Normiranje

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = 1$$

↓

Poissonov integral

$$A = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$$

$$\langle X \rangle = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\alpha x^2} dx = 0$$

↳ neparna f-ja u simetričnom granicama!

$$\langle X^2 \rangle = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx$$

$$= 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx$$

$$= 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_0^{\infty} x\, e^{-\alpha x^2}\, x\,dx$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_0^{\infty} x\, e^{-\alpha x^2}\, 2x\,dx$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_0^{\infty} x\, e^{-\alpha x^2}\, d(x^2)$$

Smena $\quad x^2 = t \Rightarrow \quad x = t^{\frac{1}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-\alpha t} dt$$

$$= \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-\alpha t} d(\alpha t)$$

$$= \frac{1}{\alpha \pi^{1/2}} \int_0^{\infty} (\alpha t)^{\frac{1}{2}} e^{-\alpha t} d(\alpha t)$$

Smena $\quad \alpha t = \xi$

$$= \frac{1}{\alpha \pi^{1/2}} \int_0^{\infty} \xi^{\frac{1}{2}} e^{-\alpha t} d(\alpha t)$$

$$= \frac{1}{\alpha \pi^{1/2}} \int_0^{\infty} \xi^{\frac{3}{2}-1} e^{-\alpha t} d(\alpha t)$$

$$= \frac{1}{\alpha \pi^{1/2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{\alpha \pi^{1/2}} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\alpha}$$

$$D(X) = \frac{1}{2\alpha}$$

3. Posmatraju se dve vrste čestica. Verovatnoća da data zapremina V sadrži j čestica odredjena je Poisson-ovom raspodelom sa karakterističnom konstantom a, a verovatnoća da sadrži k čestica druge vrste odredjena je takodje Poisson-ovom raspodelom ali sa drugom karakterističnom konstantom b. Pretpostavljajući da su brojevi čestica različite vrste u istoj zapremini nezavisni odrediti verovatnoću da data zapremina V sadrži ukupno n čestica.

$p_j^a \quad p_k^b \qquad j+k=n$

$$\left.\begin{array}{lll} A_0 & 0 & n \\ A_1 & 1 & n-1 \\ A_2 & 2 & n-2 \\ \vdots & & \\ A_i & i & n-i \\ \vdots & & \\ A_n & n & 0 \end{array}\right\} \text{ medjusobno isključivi dogadjaji}$$

$$A = \sum_{i=0}^{n} A_i$$

$$P(A) = \sum_{i=0}^{n} P(A_i)$$

$$P(A_i) = p_i^a \cdot p_{n-i}^b = \frac{a^i e^{-a}}{i!} \, \frac{b^{n-i}}{(n-i)!} e^{-b}$$

$$P(A) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a^i b^{n-i}}{i!(n-i)!} e^{-(a+b)}$$

$$P(A) = \frac{e^{-(a+b)}}{n!} \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} a^i b^{n-i}}_{(a+b)^n}$$

$$P(A) = \frac{(a+b)^n}{n!} e^{-(a+b)}$$ — Opet Poisson-ova raspodela

5. Data je gustina verovatnoće $f(x) = Ax^n e^{-\alpha x}$ $0 \le x < +\infty$, gde je $\alpha = const$, a n je ceo broj ($n > 1$). a) Normirati f-ju $f(x)$. b) Ispitati da li je moguće da se odredi n tako da bude zadovoljena relacija:

$$\langle x \rangle \left\langle \frac{1}{x} \right\rangle = \langle x^2 \rangle \left\langle \frac{1}{x^2} \right\rangle .$$

a) Domaći (Kolokvijum, npr!)

b)
$$\int_0^\infty x^{n+1} e^{-\alpha x^2} dx \int_0^\infty x^{n-1} e^{-\alpha x^2} dx =$$

$$\int_0^\infty x^{n+2} e^{-\alpha x^2} dx \int_0^\infty x^{n-2} e^{-\alpha x^2} dx$$

Raspišimo integrale malo drugačije

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} x dx \int_0^\infty x^{n-2} e^{-\alpha x^2} x dx =$$

$$\int_0^\infty x^{n+1} e^{-\alpha x^2} x dx \int_0^\infty x^{n-3} e^{-\alpha x^2} x dx$$

Smena $\alpha x^2 = t \Rightarrow x dx = \frac{dt}{2\alpha}$, $x = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}}$

$$\int_0^\infty \frac{t^{\frac{n}{2}}}{\alpha^{\frac{n}{2}}} e^{-t} \frac{dt}{2\alpha} \int_0^\infty \frac{t^{\frac{n-2}{2}}}{\alpha^{\frac{n-2}{2}}} e^{-t} \frac{dt}{2\alpha} =$$

$$\int_0^\infty \frac{t^{\frac{n+1}{2}}}{\alpha^{\frac{n+1}{2}}} e^{-t} \frac{dt}{2\alpha} \int_0^\infty \frac{t^{\frac{n-3}{2}}}{\alpha^{\frac{n-3}{2}}} e^{-t} \frac{dt}{2\alpha}$$

Stepeni ~~od~~ α se pokrate!

$$\int_0^\infty t^{\frac{n}{2}} e^{-t}\,dt \int_0^\infty t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t}\,dt =$$

$$\int_0^\infty t^{\frac{n+1}{2}} e^{-t}\,dt \int_0^\infty t^{\frac{n-3}{2}} e^{-t}\,dt$$

Euler-ova Γ- funkcija

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

Poređenjem

$$u-1 = \frac{n}{2} \Rightarrow u = \frac{n}{2}+1$$

$$u-1 = \frac{n}{2}-1 \Rightarrow u = \frac{n}{2}$$

$$u-1 = \frac{n}{2}+\frac{1}{2} \Rightarrow u = \frac{n+3}{2}$$

$$u-1 = \frac{n}{2}-\frac{3}{2} \Rightarrow u = \frac{n-1}{2}$$

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

$$\frac{n}{2}\,\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n+1}{2}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\frac{2}{n-1}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$\frac{n}{2}\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \frac{n+1}{n-1} \Rightarrow$$

Transcendentan broj $\neq$ racionalan broj

$\Downarrow$

$\nexists\, n$

V. pozadini $\rightarrow$

5. Klasični 1D harmonijski oscilator osciluje frekvencijom f. Naći verovatnoću da pri slučajnom merenju njegovog položaja isti bude nađen između x i $x+dx$. Ispitati dobijenu gustinu verovatnoće: $\langle x \rangle$ i $D(x)$. Kolika je srednja vrednost brzine oscilatora duž trajektorije?

ispit

Naći srednju vrednost $\langle x \rangle$.

J-na kretanja za oscilator

$$\ddot{x} + f^2 x = 0 \qquad (*)$$

$$m\ddot{x} = \sum_i F_i, \quad m\ddot{x} = -kx, \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}x, \quad \ddot{x} = -f^2 x \Rightarrow (*)$$

Partikularno rešenje (*)

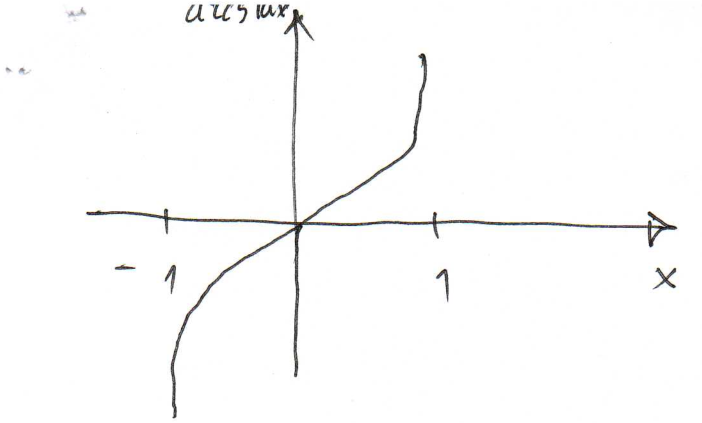
$$x = A \sin ft$$

Verovatnoća nalaženja oscilatora između x i $x+dx$

$$dw = \frac{dt}{\frac{T}{2}}$$

Ali

$$x = A \sin ft \Rightarrow t = \frac{1}{f} \arcsin \frac{x}{A}$$



$$\frac{x}{A} = \pm 1 \Rightarrow x = \pm A$$

Preslikavanje $dt \leftrightarrow dx$ jednoznačno.

Sada:

$$t = \frac{1}{f} \arcsin \frac{x}{A}$$

$$dt = \frac{1}{f} \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}} dx \quad , \quad T = \frac{2\pi}{f}$$

$$dw = \frac{dt}{\frac{T}{2}} = \frac{\frac{1}{f} \frac{1}{\sqrt{A^2-x^2}} dx}{\frac{\pi}{f}} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{A^2-x^2}} dx$$

$$g_v(x) = \frac{dw}{dx} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{A^2-x^2}}$$

$$\int_{-A}^{A} g_v(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-A}^{A} \frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}} = \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{A} \Big|_{-A}^{A}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\arcsin 1 - \arcsin(-1) \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$= 1$$

$$\langle x \rangle = \int_{-A}^{+A} x\, g_v(x)\, dx$$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-A}^{+A} x \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \frac{1}{\pi} \int_{-A}^{A} \frac{x\, dx}{A\sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2}}$$; smena $\frac{x}{A} = z$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{Az\, A\, dz}{A\sqrt{1-z^2}} = \frac{A}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\, dz = 0$$

$f(z) = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$ neparna f-ja : $f(-z) = -f(z)$

$\hookrightarrow$ u simetričnom granicama

Srednja vrednost brzine LHO duž trajektorije

$$x = A \sin ft$$

$$dx = Af \cos ft\, dt$$

$$\dot{x} = Af \cos ft = Af\sqrt{1 - \sin^2 ft} = Af\sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2}$$

$$= f\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$\langle \dot{x} \rangle_t = \int_{-A}^{A} \dot{x}\, g_v(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-A}^{A} f\sqrt{A^2-x^2}\, \frac{1}{\sqrt{A^2-x^2}}\, dx$$

$$= 2Af/\pi$$

Kako izgleda $g_v(\dot{x})$? (Savet: pođi od $\dot{x} = Af\cos ft$ i uspostavi $t = f(\dot{x}) \Rightarrow dt = \beta\, d\dot{x}$, $dw = \frac{dt}{\frac{T}{2}}$

$$g_v(\dot{x}) = \frac{1}{\pi} \frac{d\dot{x}}{\sqrt{(Af)^2 + \dot{x}^2}}$$

Dodatak

Srednja brzina i brzina usrednjena po trajektoriji

$$\langle \dot{x} \rangle_t = \frac{\int \dot{x}\,dt}{\int dt} = \frac{\int_{-A}^{A} dx}{\int_{-A}^{A} \frac{dx}{\dot{x}}}$$

$$\langle \dot{x} \rangle_t = \frac{2A}{\int_{-A}^{A} \frac{dx}{f\sqrt{A^2-x^2}}} = \frac{2Af}{\pi} \quad \text{(DOBIVENO)}$$

$$\langle \dot{x} \rangle_x = \frac{\int_0^h \dot{x}\,dx}{\int_0^h dx}$$

$$\langle \dot{x} \rangle_x = \frac{\int_{-A}^{A} f\sqrt{A^2-x^2}\,dx}{\int_{-A}^{A} dx} = \frac{f}{2A} \underbrace{\int_{-A}^{A} \sqrt{A^2-x^2}\,dx}_{\text{Mathematica } \frac{\pi}{2} A^2}$$

$$\langle \dot{x} \rangle_x = \frac{f}{2A}\,\frac{\pi}{2}\,A^2 = \frac{1}{4} A f \pi$$

6. Pokazati važenje formule

$$\ln N! \simeq N\ln N - N$$

poznate kao Sterling-ova aproksimacija, za $N \gg 1$

$$\ln N! = \ln(N(N-1)\cdots 1)$$
$$= \ln N + \ln(N-1) + \ln(N-2) \cdots + \ln 1$$
$$\simeq \int_0^N \ln x \, dx$$

Integral $I = \int \ln x \, dx$

$u = \ln x \qquad du = \frac{dx}{x}$

$dv = dx \qquad v = x$

$$I = x \ln|x| - \int dx = x\ln|x| - x$$

za $x > 0$

$$I = x\ln x - x$$

$$\ln N! \simeq [x \ln x - x]_0^N = N\ln N - N - 0$$

Dakle, za $N \gg 1$

$$\boxed{\ln N! \simeq N\ln N - N}$$

Preciznija aproksimacija glasi

$$x! \sim \sqrt{2\pi x}\, e^{-x} x^x$$